RR-0880

Third Year B. Sc. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - IX

(Old Course)

Time : 3 Hours] [Total Marks : 105

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :

☛ **T. Y. B. Sc.**

Name of the Subject :

☛ **Mathematics - 9 (Old)**

☛ Subject Code No. : **0 8 8 0** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **Nil**

Seat No. :

Student's Signature

(૨) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ ૬ પ્રશ્નો છે.

(૩) બધા જ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.

(૪) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નનાં ગુણ દર્શાવે છે.

(૫) સામાન્ય સંકેત અનુસરો.

૧ નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(૧) બતાવો કે ભિન્ન ન્યૂનત્તમ પદોનો ગુણાકાર શૂન્ય છે. ૨

(૨) વ્યાખ્યા આપો : ૨

(૧) આંશિક ક્રમિત ગણ

(૨) લેટિસ સમરૂપતા

(૩) બુલિય વિધેય $f(a, b, c) = a \cdot (b + c)$ નું ધન હાર નિરૂપણ મેળવો. ૧

(૪) સીમિત લેટિસ $\langle L, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$માં બતાવો કે 0 એ 1નો અનન્ય પૂરક ઘટક છે. ૧

(૫) લેટિસ $\langle \rho(A), \subseteq \rangle$ની હેઝ આકૃતિ દોરો જ્યાં $A = \{a, b, c\}$. ૧

(૬) શું $\langle L, \leq \rangle$ એ પૂરકીય લેટિસ છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો. જ્યાં $L = [0, 1]$ અને "$\leq$"ના કરતાં ઓછું અથવા બરાબર. ૧

(૭) હેમિલટોનિયન પથ કરતાં વધુ લંબાઈવાળો પથ ગ્રાફ Gમાં શક્ય નથી એમ બતાવો. ૨

(૮) વ્યાખ્યા આપો : ૨

(૧) યુનિકર્સલ રેખા.

(૨) બાયનરી ટ્રીની ઊંચાઈ

(૯) ત્રણ કે ત્રણથી વધારે શિરોબિંદુઓવાળી ટ્રીમાં ઓછામાં ઓછાં કેટલા એકકક્ષી શિરોબિંદુઓ હોય ? ૧

(૧૦) દર્શાવો કે ટ્રી એ ન્યૂનત્તમ સંયોગી ગ્રાફ છે. ૧

(૧૧) કોનીગ્સબર્ગ બ્રીજ કોયડો જણાવો. ૧

૨ (અ) કોઈ પણ ગણ Sનો ઘાતગણ $\rho(s)$ છે. સાબિત કરો કે $\langle \rho(s), \subseteq \rangle$ એ લેટિસ છે. શું એ સાંકળ છે ? તમારા જવાબનું સમર્થન કરો. ૬

(બ) લેટિસ $\langle L, *, \oplus \rangle$માં સાબિત કરો કે, ૬

(૧) $a \le b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow,\ a \oplus b = b \quad \forall\, a,\ b \in L$

(૨) $a \le c \Leftrightarrow a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * c;\ \forall\, a,\ b,\ c \in L$

(ક) જો $x_1 \equiv y_1$ અને $x_2 \equiv y_2$ હોય તો સાબિત કરો કે ૬

$(x_1 + x_2) \equiv (y_1 + y_2)$.

અથવા

૨ (અ) લેટિસ $\langle L, \le \rangle$માં સાબિત કરો કે, ૬

(૧) $b \le c \Rightarrow (a * b) \le (a * c),\ \ \forall\, a,\ b,\ c \in L$

(૨) $a * (b \oplus c) \ge (a * b) * (a * c),\ \forall\, a, b, c \in L$

(બ) દર્શાવો કે સીમિત વિભાજનીય લટિસમાં પૂરક ઘટકો ધરાવતાં ઘટકો ઉપલેટિસ બનાવે છે. ૬

(ક) લેટિસ Lમાં સંબંધ Rજો એવી રીતે વ્યાખ્યાયિત હોય કે જેથી $a\,R\,b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b,\ a,\ b \in L$તો સાબિત કરો કે R એ ક્રમિત સંબંધ છે અને $a \oplus b$ એ a અને b ની લઘુતમ ઊર્ધ્વસીમા છે. ૬

૩ (અ) લેટિસ સમરૂપતા વ્યાખ્યાયિત કરો. ધારો કે S_{12} અને 12 ના ધન અવયવોનો ગણ છે. D એ ભાગાકારનો સંબંધ છે તથા "$\le$" એ થી ઓછું કે બરાબર સંબંધ છે. જો $f : \langle S_{12},\ D \rangle \to \langle S_{12},\ \le \rangle$ની વ્યાખ્યા $f(x) = x$ મુજબ કરવામાં આવે તો સાબિત કરો કે f ક્રમ જાળવે છે, એ એક-એક અને વ્યાપ્ત છે, પરંતુ f^{-1} ક્રમ જાળવતું નથી. ૬

(બ) સાબિત કરો કે પ્રત્યેક સાંકળ એ વિભાજનીય લેટિસ છે. ૬

(ક) બુલિય બીજગણિતમાં સાબિત કરો કે ૬

(૧) $ab'+a'b=0 \Leftrightarrow a=b$

(૨) $(a+b)(a'+c)=ac+a'b$

અથવા

૩ (અ) વિભાજનીય લેટિસ $\langle L, *, \oplus\rangle$માં સાબિત કરો કે, ૬

(૧) $(a*b=a*c)\wedge(a\oplus b=a\oplus c)\Rightarrow b=c, \quad \forall\, a,b,c\in L$

(૨) $(a*b)\oplus(b*c)\oplus(c*a)=(a\oplus b)*(b\oplus c)*(c\oplus a),$
$\forall\ a,\ b,\ c\in L.$

(બ) ઉપબુલિય બીજગણિતની વ્યાખ્યા આપો. જો $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1\rangle$ બુલિય બીજગણિત હોય અને $S\subseteq B$, $\oplus$ અને ' વિષે સંવૃત્ત હોય તો સાબિત કરો કે S એ B નું ઉપબુલિય બીજગણિત છે. ૬

(ક) સાબિત કરો કે લટિસનો પ્રત્યેક અંતરાલ ઉપલેટિસ છે. ૬

૪ (અ) બુલિય પદાવલિ, $\alpha(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=\left[(x_1+x_2)(x_3\ x_4)'\right]'$નું ગુણાકારના સરવાળા માટેનું કેનોનિકલ સ્વરૂપ મેળવો. ૬

(બ) વ્યાખ્યા આપો : ૬

(૧) બુલિય વિધેય

(૨) બુલિય પદાવલિ

બુલિય વિધેય $f=w'+y\cdot(x'+z')$નું

(૧) ઘન નિદર્શન

(૨) સર્કિટ રેખાચિત્ર નિદર્શન આપો.

(ક) સાબિત કરો કે ગ્રાફમાં અયુગ્મ કક્ષાનાં શિરોબિંદુઓની સંખ્યા યુગ્મ છે. ૬

અથવા

૪ (અ) બુલિય વિધેય $f(a,\ b,\ c,\ d)=\sum(0,\ 1,\ 4, 5,\ 8,\ 12)$નું કાર્નોફ આલેખ નિદર્શન કરો અને તેનું ન્યૂનત્તમ સ્વરૂપ આપો. ૬

(બ) સાબિત કરો કે નીચેનાં બુલિય સ્વરૂપો α અને β એક બીજાને સામ્ય છે. ૬

$\alpha=(x+y)(x'+z)(y+z)$

$\beta=(x\cdot z)+(x'\cdot y)+(y\cdot z)$

(ક) બે ગ્રાફો એકરૂપ બને તે માટેની આવશ્યક શરતો જણાવો. યોગ્ય ઉદાહરણ આપી દર્શાવો કે આ શરતો પર્યાપ્ત નથી. ૬

૫ (અ) સાબિત કરો કે ગ્રાફ G નાં શિરોબિંદુ ગણ Vને બે અલગ ઉપગણો V_1 અને V_2માં વિભાજિત કરી શકાય કે જેથી Gમાં એવી કોઈ ધાર ન મળે કે જેનાં એક છેડાનું શિરોબિંદુ V_1માં અને બીજું V_2માં હોય તો અને તો જ G અસંયોગી છે. ૬

(બ) ધારો કે n – શિરોબિંદુઓવાળો સરળ ગ્રાફ G છે. જો તેને $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ કરતાં વધારે ધારો હોય તો સાબિત કરો કે તે સંયોગી છે. ૬

(ક) ગ્રાફ G માં ધારો કે આપેલ બે શિરોબિંદુઓ વચ્ચે બે ભિન્ન પરિપથો P_1 અને P_2 છે. સાબિત કરો કે $P_1 \oplus P_2$ એ G માં સર્કિટ અથવા સર્કિટોનો ગણ છે. ૬

અથવા

૫ (અ) જો G એ n શિરોબિંદુઓવાળો સંપૂર્ણ ગ્રાફ હોય કે જ્યાં $n \geq 3$ અયુગ્મ પૂર્ણાંક હોય તો સાબિત કરો કે Gમાં $\frac{n-1}{2}$ ધાર અલગ હેમિલટોનિયન પરિપથો હોય છે. ૬

(બ) જો n – શિરોબિંદુઓવાળો સંપૂર્ણ ગ્રાફ G હોય તો સાબિત કરો કે Gના દરેક શિરોબિંદુની કક્ષા $(n-1)$ છે અને Gમાં કુલ $\frac{n(n-1)}{2}$ ધારો છે. ૬

(ક) જો ગ્રાફ Gમાં નિશ્ચિત બે જ અયુગ્મ શિરોબિંદુઓ હોય તો સાબિત કરો કે તેમને જોડતો પથ Gમાં હોય જ. ૬

૬ (અ) ભૌમિતિક તર્કોનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરો કે કુરાટોવ્સ્કીનો પ્રથમ ગ્રાફ અસમતલીય છે. ૬

(બ) ટ્રીનાં કોઈ પણ ત્રણ ગુણધર્મો લખો અને તેમાંનાં કોઈ પણ બે સાબિત કરો. ૬

(ક) સાબિત કરો કે પ્રત્યેક સંયોગી ગ્રાફને ઓછામાં ઓછી એક સર્જક ટ્રી હોય છે. ૬

અથવા

૬ (અ) સમતલીય ગ્રાફના પ્રદેશો માટેનું ઓઈલરનું સૂત્ર લખો અને તેનો ઉપયોગ કરીને દર્શાવો કે કુરાટોવ્સ્કીનો દ્વિતિય ગ્રાફ અસમતલીય છે. ૬

(બ) સાબિત કરો કે જો ગ્રાફને ગોલકની સપાટી પર જડી શકાય તો અને તો જ તેને સમતલની સપાટી પર જડી શકાય. ૬

(ક) n – શિરોબિંદુઓવાળી બાયનરી ટ્રીમાં એક કક્ષાનાં શિરોબિંદુઓની સંખ્યા p હોય તો સાબિત કરો કે, ૬

(૧) $p = \frac{n+1}{2}$, (૨) $\max l_{\max} = \frac{n-1}{2}$

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the Instruction No. 1 of Page no. 1.
(2) There are 6 questions in this question paper.
(3) Answer all the questions.
(4) Figures to the right indicate marks of the questions.
(5) Follow usual notations.

1 Answer the following questions :

(1) Show that the product of two different min terms is zero. **2**

(2) Define : **2**

(1) Poset

(2) Lattice homomorphism.

(3) Obtain a cube array representation of a boolean function $f(a, b, c) = a \cdot (b + c)$. **1**

(4) In a bounded lattice $\langle L, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$. Show that 1 is the unique complement of 0. **1**

(5) Draw the Hasse diagram of the lattice $\langle \rho(A), \subseteq \rangle$ where $A = \{a, b, c\}$. **1**

(6) Is $\langle L, \leq \rangle$ a complemented lattice ? Justify your answer. Where $L = [0, 1]$ and "$\leq$" less than or equal to. **1**

(7) Show that there can be no path longer than a Hamiltonian path in a graph G. **2**

(8) Define : **2**

(1) Unicursal Line

(2) The height of a binary tree.

(9) How many minimum pendent vertices are there in a tree with three or more than three vertices. **1**

(10) Prove that a tree is a minimally connected graph. **1**

(11) State the "Konigsberg bridge problem". **1**

2 (a) Let $\rho(s)$ be a power set of a set S. Prove that $\langle \rho(s), \subseteq \rangle$ is a lattice. Is it a chain ? Justify your answer. **6**

(b) Let $\langle L, *, \oplus \rangle$ be a lattice prove that **6**

(1) $a \le b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow, \; a \oplus b = b \;\; \forall\, a, \; b \in L$

(2) $a \le c \Leftrightarrow a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * c; \; \forall\, a, \; b, \; c \in L$

(c) If $x_1 \equiv y_1$ and $x_2 \equiv y_2$ then prove that **6**

$(x_1 + x_2) \equiv (y_1 + y_2)$.

OR

2 (a) In a lattice $\langle L, \le \rangle$ prove the following : **6**

(1) $b \le c \Rightarrow (a * b) \le (a * c), \;\; \forall\, a, \; b, \; c \in L$

(2) $a * (b \oplus c) \ge (a * b) * (a * c), \; \forall\, a, b, c \in L$

(b) Show that in a bounded distributive lattice, the elements which have complements form a sub lattice. **6**

(c) In a lattice $\langle L, *, \oplus \rangle$ define relation R such that **6** $a \, R \, b \Leftrightarrow a * b = a \Leftrightarrow a \oplus b = b, \; a, \; b \in L$. Prove that R is a partial ordering relation and $a \oplus b$ is the $L \cup B$ of a and b.

3 (a) Define a lattice homomorphism. Let S_{12} be the set of positive divisions of 12. D be the relation of division and "$\le$ be the relation" less then or equal to". If $f : \langle S_{12}, \; D \rangle \to \langle S_{12}, \; \le \rangle$ is defined as $f(x) = x$ then prove that f is order preserving, it is bijective but f^{-1} is not order preserving.

(b) Show that every chain is a distributive lattice. **6**

(c) In a Boolean algebra, prove that **6**

(1) $ab' + a'b = 0 \Leftrightarrow a = b$

(2) $(a + b)\,(a' + c) = ac + a'b$

OR

3 (a) In a distributive lattice $\langle L, *, \oplus \rangle$ show that **6**

(1) $(a * b = a * c) \wedge (a \oplus b = a \oplus c) \Rightarrow b = c, \;\; \forall\, a, b, c \in L$

(2) $(a * b) \oplus (b * c) \oplus (c * a) = (a \oplus b) * (b \oplus c) * (c \oplus a),$
$\forall\; a, \; b, \; c \in L.$

(b) Define sub-Boolean algebra. If $\langle B, *, \oplus, ', 0, 1 \rangle$ is a Boolean algebra and $S \subseteq B$, is closed under $\oplus$ and $'$ then prove that S is a sub-Boolean algebra of B. **6**

(c) Show that every interval of a lattice is a sublattice. **6**

4 (a) Obtain the sum of products canonical form of the boolean expression **6**

$\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = [(x_1 + x_2)(x_3 x_4)']'$

(b) Define : **6**

(1) A Boolean function

(2) A Boolean expression

Give :

(i) The cube representation

(ii) The circuit diagram representation of the boolean function

$f = w' + y \cdot (x' + z')$

(c) Prove that the number of vertices of odd degree in a graph is even. **6**

OR

4 (a) Give karnaugh map representation of boolean function $f(a, b, c, d) = \sum(0, 1, 4, 5, 8, 12)$ minimize it. **6**

(b) Show that the following Boolean forms α and β are equivalent to each other **6**

$\alpha = (x + y)(x' + z)(y + z)$

$\beta = (x \cdot z) + (x' \cdot y) + (y \cdot z)$

(c) State the necessary conditions for two graphs to be isomorphic. By proper illustration show that they are not sufficient. **6**

5 (a) Prove that a graph G is disconnected if and only if its vertex set V can be partitioned into disjoint subsets V_1 **and** V_2 such that there does not exist an edge in G, whose one end vertex is in V_1 and the other is V_2. **6**

(b) Let G be a simple graph with $n-$vertices. If it has more than $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ edges then prove that it is connected.

(c) In a graph G let P_1 and P_2 be two different paths between two given vertices. Prove that $P_1 \oplus P_2$ is circuit on a set of circuits. **6**

OR

5 (a) If G is a complete graph with n -vertices, where n is odd integer $n \geq 3$ then prove that there are $\frac{n-1}{2}$ edge disjoint Hamiltonian circuits in G. **6**

(b) If G is a complete graph with n vertices then prove that the degree of any vertex in G is $(n-1)$ and the total number of edges in G is $\frac{n(n-1)}{2}$. **6**

(c) If a graph has exactly two odd vertices then prove that there must be a path in G joining them. **6**

6 (a) Using geometrical arguments prove that Kuratowski's first graph is non-planar. **6**

(b) State any three properties of a tree and prove any two of them. **6**

(c) Prove that every connected graph has at least one spanning tree. **6**

OR

6 (a) State Euler's formula for regions of a planar graph and use it to prove that the Kuratowski's second graph is non-planar. **6**

(b) Show that a graph can be embedded in the surface of a sphere if and only if it can be embedded in a plane. **6**

(c) Let p be the number of pendent vertices in a binary tree with n-vertices prove that : **6**

(1) $p = \frac{n+1}{2}$, (2) $\max l_{\max} = \frac{n-1}{2}$